Лекция 4. Основы имитационного статистического моделирования

Цель лекции: рассмотреть основы имитационного статистического моделирования

Ключевые слова: математические модели, абсолютный и смешанный приоритет

Основные вопросы:

1. Этапы разработки математических моделей
2. Для чего проводят машинные эксперименты
3. Разновидности СМО
4. Относительный приоритет
5. Абсолютный и смешанный приоритет
6. Способы построения моделирующих алгоритмов

Последовательность разработки математических моделей.

В процессе разработки и машинной реализации математической модели входят следующие этапы:

- Построение концептуальной модели;
- Разработка алгоритма модели системы;
- Разработка программы модели системы;
- Проведение машинных экспериментов с моделью системы.

1.Построение концептуальной модели

Построение концептуальной модели включает следующие подэтапы

- Постановку задачи моделирования;
- Определение требований к исходной информации и ее сбор;
- Выдвижение гипотез и предположений;
- Определение параметров и переменных модели;
- Обоснование выбора показателей и критериев эффективности системы;
- Составление содержательного описания модели.

При постановке задачи моделирования дается четкая формулировка целей и задач исследования реальной системы, обосновывается необходимость машинного моделирования, выбирается методика решения задачи с учетом имеющихся ресурсов, определяются возможность разделения задачи на подзадачи.

При сборе необходимой исходной информации необходимо помнить, что именно от качества исходной информации необходимо помнить, что именно от качества исходной информации об объекте моделирования зависит как адекватность модели, так и достоверность результатов моделирования.

Гипотезы при построении модели системы служат для заполнения «пробелов» в понимании задачи исследователем. Предположения дают возможность провести упрощение модели. В процессе работы с моделью системы возможно многократное возвращение к этому подэтапу в зависимости от полученных результатов моделирования и новой информации об объекте. При определении параметров и переменных составляется перечень входных, выходных и управляющих переменных, а также внешних и внутренних параметров системы.

Выбранные показатели и критерии эффективности системы должны отражать цель функционирования системы и представлять собой функции переменных и параметров системы.

Разработка концептуальной модели завершается составлением содержательного описания, которое используется как основной документ, характеризующей результаты работы на первом этапе.

2. Разработка алгоритма модели

Разработка алгоритма модели включает следующие подэтапы:

- Построение логической схемы алгоритма;
- Получение математических соотношений;
- Проверку достоверности алгоритма

Вначале создается укрупненная схема моделирующего алгоритма, которая задает общий порядок действий при моделировании исследуемого процесса. Затем разрабатывается детальная схема. Каждый элемент которой впоследствии превращается в оператор программы.

Для комбинированных моделей разрабатывается аналитическая часть в виде явных функций и имитационная часть в виде моделирующего алгоритма.

Проверка достоверности алгоритма должна дать ответ на вопрос, насколько алгоритм отражает замысел моделирования, сформулированный на этапе разработки концептуальной модели.

3 Разработка программы

Разработка программы для ЭВМ включает следующие подэтапы:

- выбор вычислительных средств;
- проведение программирования;
- проверку достоверности программы.

Прежде всего выбирается тип ЭВМ и язык программирования. Создание программы по детально разработанному алгоритму может осуществить программист без участия и помощи разработчика модели.

После составления программы производится проверка ее достоверности на контрольном примере. На этом подэтапе необходимо оценить затраты машинного времени для расчета одной реализации моделируемого процесса, что позволит разработчику модели правильно сформулировать требования к точности и достоверности результатов моделирования.

4 Проведение машинных экспериментов с моделью системы

На этом этапе проводятся серийные расчеты по составленной и отлаженной программе. Этап включает следующие подэтапы:

- планирование машинного эксперимента;
- проведение рабочих расчетов;
- представление результатов моделирования;
- интерпретацию результатов моделирования;

- выдачу рекомендаций по оптимизации режима работы реальной системы.

Перед проведением рабочих расчетов на ЭВМ должен быть составлен план проведения эксперимента с указанием комбинаций переменных и параметров, для которых должно проводиться моделирование системы. Задача заключается в разработке оптимального плана эксперимента, реализация которого позволяет при сравнительно небольшом числе испытаний модели получить достоверные данные о закономерностях функционирования системы.

Результаты моделирования могут быть представлены в виде таблиц, графиков, диаграмм, схем и т.п. В большинстве случаев наиболее простой формой считаются таблицы, хотя графики более наглядно иллюстрируют результаты моделирования системы.

Интерпретация результатов моделирования имеет целью переход от информации, полученной в результате машинного эксперимента с моделью, к выводам, касающимся процесса функционирования объекта-оригинала.

На основании анализа результатов моделирования принимается решение о том, при каких условиях система будет функционировать с наибольшей эффективностью.

Типовые математические схемы.

В процессе создания математической модели, реализуемой на ЭВМ, происходит переход от содержательного описания к формальному алгоритму. Промежуточным звеном между ними может служить *математическая схема.*

Существует ряд типовых математических схем, которые могут лечь в основу разрабатываемого конкретного моделирующего алгоритма.

К ним относятся следующие схемы (модели):

- непрерывно-детерминированные модели (D-схемы);
- дискретно-детерминированные модели (F-схемы);
- дискретно-стохастические модели (P-схемы);
- непрерывно-стахастические модели (Q-схемы).

К непрерывно-детерминированным моделям относятся модели, описываемые системами обыкновенных дифференциальных уравнений или уравнений в частных производных. В качестве независимой переменной, от которой зависят неизвестные искомые функции, обычно служит время. Тогда вектор-функция искомых переменных будет непрерывной. Математические схемы такого вида отражают динамику изучаемой системы и поэтому называются D – схемами.(англ.dynamic).

К дискретно детерминированным моделям относятся так называемые конечные автоматы. Автомат можно представить как некоторое устройство, на которое подаются входные сигналы и снимаются выходные и которое может иметь некоторые внутренние состояния. У конечного автомата множество входных сигналов и внутренних состояний является конечным множеством. Название F-схема происходит от английских слов finite autotomata.

К дискретно-стохастическим моделям относятся вероятностные (стохастические) автоматы или по-английски probabilistic automat . Отсюда название – P-схема. В общем виде вероятностный автомат можно определить как дискретный потактный преобразователь информации с памятью, функционирование которого в каждом такте зависит только от состояния памяти в нем и может быть описано стохастически.

Примеры типовой схемы ***непрерывно-стохастического типа*** может служить схема ***системы массового обслуживания*** (СМО) или по английски queueing system. Отсюда название – Q-схема.

В качестве процесса обслуживания в СМО могут быть представлены различные по физической природе процессы функционирования экономических, производственных, технических и других систем, например потоки товаров, потоки продукции, потоки деталей, потоки клиентов и т.п.

Для любой системы массового обслуживания характерно наличие трех отличительных свойств:

- объектов, у которых может возникнуть потребность в удовлетворении некоторых заявок:
- агрегатов, предназначенных для удовлетворения заявок на обслуживание;
- специальной организации приема в систему заявок и их обслуживания.

Схема системы массового обслуживания показана на рисунок 9.

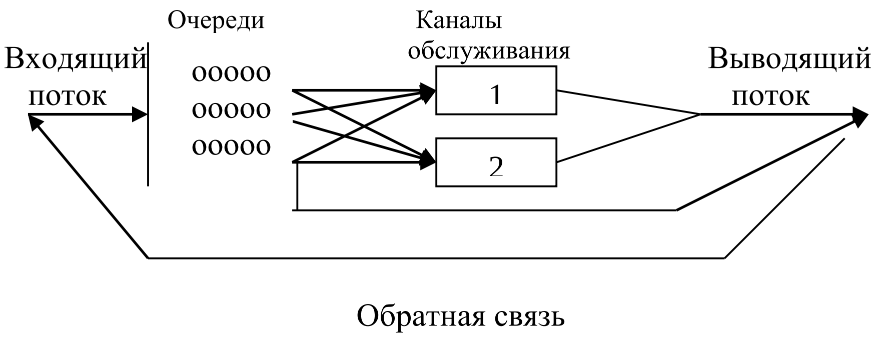


Рисунок 9 - Схема системы массового обслуживания

Совокупность заявок рассматривают как поток событий, т.е. последовательность событий, происходящих в случайные моменты времени. Время обслуживания заявки также считается случайной величиной.

Из-за совместного действия этих двух случайных факторов количество обслуженных заявок в заданном интервале времени является случайной .

Исследование моделей СМО ставит целью установление параметров случайных величин, характеризующих процесс обслуживания заявок.

Существует несколько разновидностей СМО:

1) по числу каналов обслуживания СМО делятся на одноканальные и многоканальные;
2) по числу фаз (последовательно соединенных агрегатов) СМО делятся на однофазные и многофазные;

3) по наличию обратной связи СМО делятся на разомкнутые (с бесконечным числом заявок) и замкнутые (с конечным числом заявок);
4) по наличию очереди СМО делятся н системы без очередей (с потерями заявок), системы с неограниченным ожиданием (по времени иди длине очереди) и системы с ограниченным ожиданием (по времени или длине очереди);
5) по принципу формирования очередей СМО делятся на системы с общей очередью и системы с несколькими очередями;
6) по наличию отказов СМО делятся на системы с отказами м системы без отказов;
7) по виду приоритета СМО делятся на системы со статическим приоритетом (обслуживание в порядке поступления заявок) и системы с динамическим приоритетом, который, в свою очередь, имеет три разновидностей:
   - относительный приоритет (заявка высокого приоритета ожидает окончания обслуживания заявки с более низким приоритетом);
   - абсолютный приоритет (заявка высокого приоритета при поступлении немедленного вытесняет заявку с более низким приоритетом);
   - смешанный приоритет (заявка с низшим приоритетом обслуживалась в течение времени, меньше критического абсолютный приоритет, в противном случае используется относительный приоритет).

Способы построения моделирующих алгоритмов

Существуют следующие способы (или принципы) построения моделирующих алгоритмов:

1. способ повременного моделирования с постоянным шагом;
2. способ повременного моделирования с переменным шагом;
3. способ последовательной проводки заявок;
4. способ поэтапной последовательности проводки заявок.

Повременное моделирование с постоянным шагом

Процесс функционирования системы можно рассматривать как последовательную смену ее состояний. Пусть, например, в одноканальной системе массового обслуживания происходит процесс обслуживания поступающих заявок (рисунок 10).

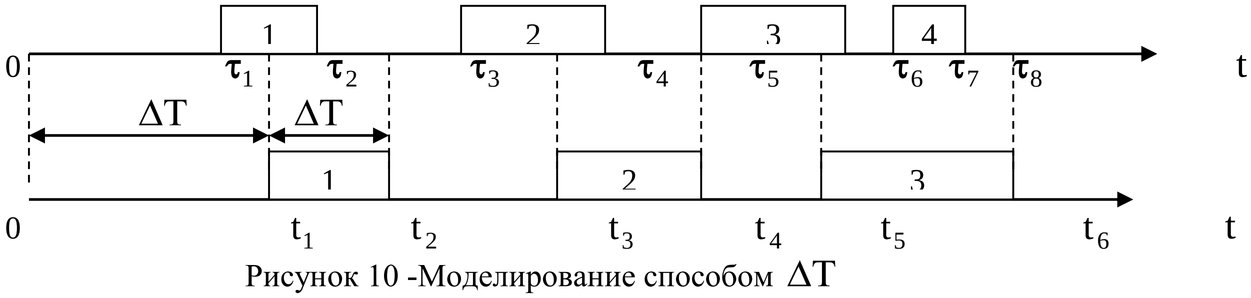


Рисунок 10 -Моделирование способом ΔT

Введем обозначения:

τ_1 -момент начала обслуживания 1-й заявки;
τ_2 -момент конца обслуживания 1-й заявки;
τ_3 -момент начала обслуживания 2-ой заявки;
τ_4 -момент конца обслуживания 2-й заявки;
τ_5 -момент начала обслуживания 3-ой заявки;
τ_6 -момент конца обслуживания 3-й заявки;
τ_7 -момент начала обслуживания 4-ой заявки;
τ_8 -момент конца обслуживания 4-й заявки.

Выберем шаг ΔT и будем анализировать состояние системы через промежутки времени $t_1, t_2, t_3, \ldots,$ отстоящие друг от друга на ΔT. Этот способ иногда называют *способом* ΔT

В момент t_1 будет обнаружено, что в системе началось обслуживание 1-й заявки. В момент $t_2 = t_1 + \Delta T$ будет установлено, что обслуживание 1-й заявки завершено. В момент $t_3 = t_2 + \Delta T$ будет обнаружено, что в системе началось обслуживание 2-й заявки. В момент $t_4 = t_3 + \Delta T$ будет установлено, что обслуживание 2-й заявки завершено. В момент $t_5 = t_4 + \Delta T$ будет обнаружено, что в системе началось обслуживание 3-й заявки. В момент $t_6 = t_5 + \Delta T$ будет установлено, что обслуживание 3-й заявки завершено. Факт поступления 4-й заявки и факт окончания ее обслуживания не будут обнаружены.

Для предотвращения потерь информации и повышения точности работы модели нужно уменьшить шаг ΔT. При малом ΔT можно достаточно точно описать процесс функционирования системы.

Однако способ ΔT является весьма неэкономичным с точки зрения расхода машинного времени. Достоинство способа состоит в том, что он позволяет моделировать любые процессы: детерминированные, непрерывные, случайные, с зависимыми или независимыми событиями и т.п.

Данный способ редко используется на практике из-за его неэкономичности.

Повременное моделирование с переменным шагом

В процессе функционирования системы массового обслуживания можно выделить два типа состояний:

- обычные, в которых система находится почти все время;
- особые, характеризующиеся сменой состояний.

К особым состоянием относятся: поступление заявки, начало и окончание ее обслуживания, появление отказа (сбоя) в работе системы, восстановление работоспособности системы и т.п.

Если моделирующий алгоритм построен по принципу особых состояний, то он просматривает процесс функционирования только в те моменты времени, когда состояние системы меняется.

В общем случае события, вызывающие особые состояния, могут быть зависимыми.

Моменты возникновения особых состояний и их характеристики (признаки) записываются в *календарь событий*. В ходе моделирования может происходить корректировка календаря. Например, при поступлении заявки высшего приоритета может произойти прекращение обслуживания заявки низшего приоритета. Затем после освобождения канала возобновляется прерванный процесс обслуживания этой заявки.

Анализ календаря событий позволяет установить результаты моделирования для каждой случайной реализации. Данный метод применяется редко из-за сложности разработки алгоритма, основанного на использовании календаря событий..

Последовательная проводка заявок

При моделировании процессов обслуживания заявок в системе массового обслуживания иногда удобно строить моделирующий алгоритм по способу ***последовательной проводки заявок***. Этот способ может быть осуществлен, если события, происходящие в системе, не зависят друг от друга.

Моделирующий алгоритм последовательной воспроизводит истории отдельных заявок в порядке их поступления в систему. Алгоритм обращается к сведениям о других заявках лишь в том случае, если это необходимо для решения вопроса о дальнейшем порядке обслуживания данной заявки. Этот способ не требует создания календаря событий.

Существуют две разновидности способа последовательной проводки:

-проводка одиночных заявок;

-проводка потоков заявок.

Рассмотрим вначале первый вариант. Пусть, например, в одноканальную систему массового обслуживания в одной случайной реализации процесса поступили четыре однородные заявки(с одинаковым приоритетом), как показано на рисунке 11.

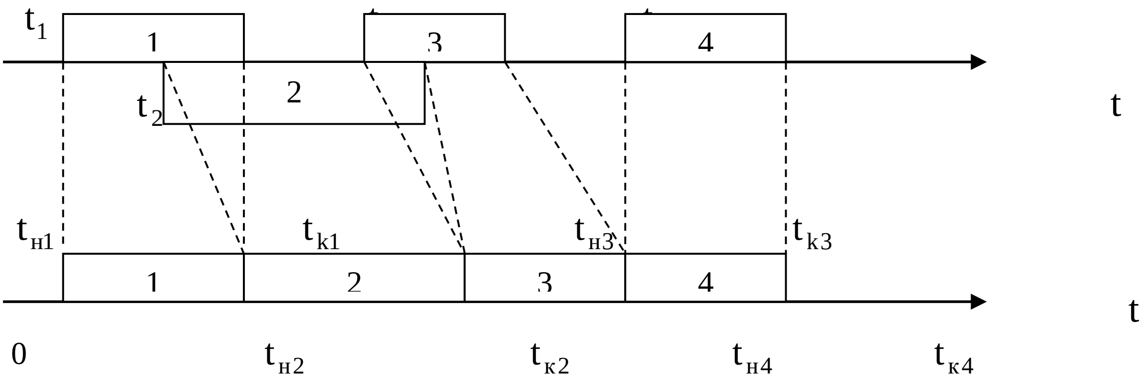


Рисунок 11- Последовательная проводка

В случайный момент времени t_1 в систему поступила 1-я заявка. Поскольку канал свободен, ее обслуживание начинается в момент времени $t_{н1} = t_1$. Если распределение времени обслуживания известно, то с помощью жребия можно определить случайную величину времени обслуживания $\boldsymbol{\tau}_1$. Тогда момент окончания обслуживания 1-й заявки будет равен : $\tau_{к1} = t_{н1} + \tau_1$. При этом к счетчику числа обслуженных заявок прибавляется единица.

Далее определяется время поступления 2-й заявки. Если распределение случайной величины времени между соседними заявками известно, то с помощью жребия можно определить интервал между 1-й и 2-й заявками и найти момент времени поступления 2-й заявки t_2. Поскольку канал занят, для 2-й заявки начинается период ожидания продолжительностью $\Delta T_{ож} = t_{к1} - t_2$. Обслуживание этой заявки начинается в момент $t_{н2} = t_{к1}$. Далее с помощью жребия определяется случайная величина времени обслуживания 2-й заявки τ_2. Тогда момент окончания обслуживания 2-й заявки будет равен: $t_{к2} = t_{н2} + \tau_2$. К счетчику числа обслуженных заявок прибавляется единица.

Аналогичным образом обслуживаются 3-я и 4-я заявки.

Вторым вариантом способа последовательной проводки заявок является способ, при котором вначале формируется поток заявок, а затем начинается процесс обслуживания заявок. При этом предполагается, что все заявки однородные. В этом случае для хранения данных о заявках в памяти ЭВМ необходимо создавать массивы чисел. Поскольку размерность такого массива заранее неизвестна, приходится выбирать ее с определенным запасом, что приводит к напрасному расходу памяти.

Поэтапная последовательная проводка заявок.

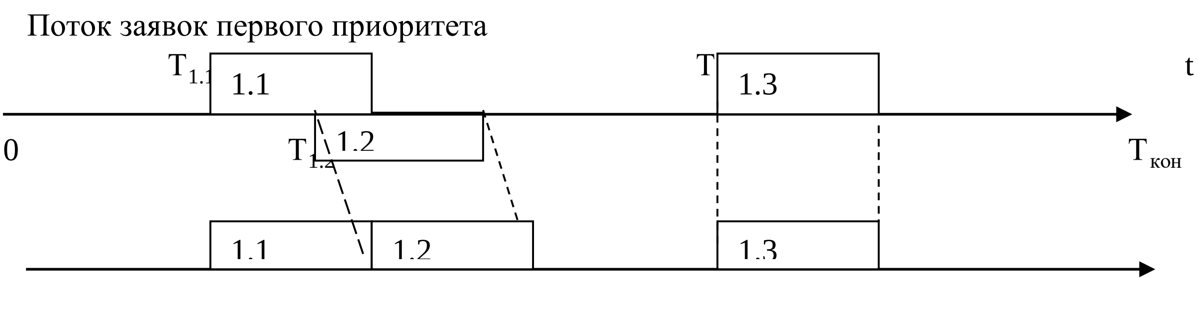
Рассмотрим систему, предназначенную для обслуживания заявок двух различных приоритетов. Сделаем следующие допущения:

- все заявки независимы;
- при обслуживании используется абсолютный приоритет, т.е. поступающая заявка высшего приоритета немедленно вытесняет обслуживаемую заявку низшего приоритета;
- после освобождения канала может производиться «дообслуживание» той заявки второго приоритета, которая была вытеснена заявкой первого приоритета.

При этих допущениях для построения моделирующего алгоритма может быть применен усовершенствованный способ последовательной проводки, который можно назвать *способом поэтапной последовательной проводки.*

Первый этап моделирования.

Распределение случайных величин интервалов между соседними заявками первого приоритета будем считать известны. Если задать интенсивность потока, то с помощью датчика случайных чисел можно определить случайные моменты поступления заявок $T_{1.1}$ $T_{1.2}$ $T_{1.3}$ и т.д. Распределение случайного времени обслуживания будем также считать известным. Если задать среднее время обслуживания, то с помощью датчика случайных чисел можно заранее определить случайные интервалы обслуживания (рисунок 12)



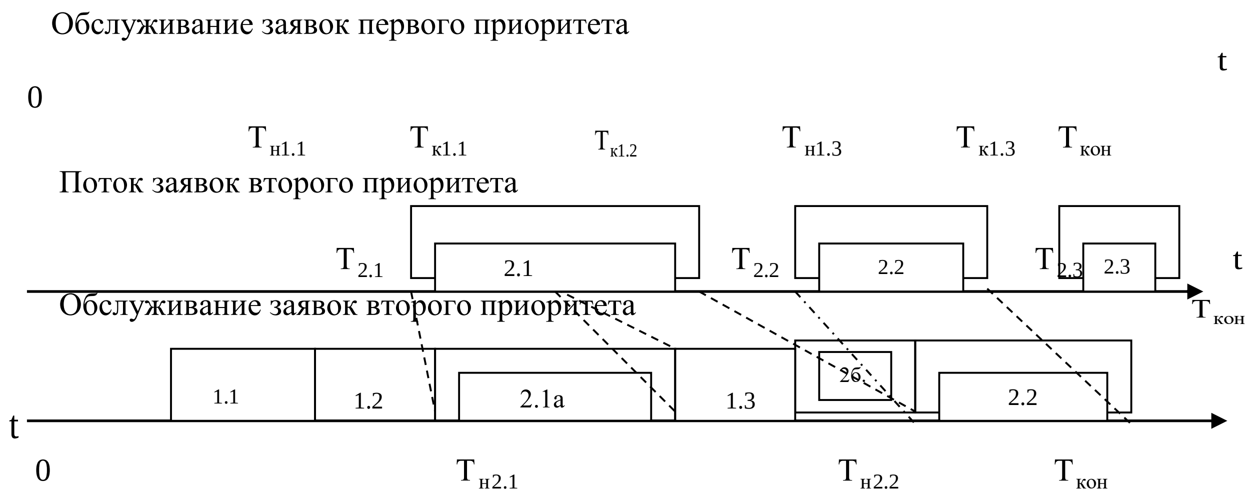


Рисунок 12 - Поэтапная последовательная проводка заявок

Установим модельное время на нуль. Будем рассматривать изолированный поток заявок первого приоритета так, как будто заявок второго приоритета не существует.

Применив способ последовательной проводки, можно установить моменты начала и окончания обслуживания заявок первого приоритета. Иначе говоря, в результате выполнения первого этапа моделирования можно определить значения элементов массива $\langle T_{н1.1}, T_{н1.2}, T_{н1.3} \ldots \rangle$ и элементов массива $\langle T_{к1.1}, T_{к1.2}, T_{к1.3} \ldots \rangle$.

Можно также подсчитать число обслуженных заявок до конца периода обслуживания $T_{кон}$.

В данном случае заявки 1.1 и 1.3 обслуживаются сразу после их поступления, а заявка 1.2 обслуживается после некоторого ожидания, связанного с занятостью канала.

Второй этап моделирования

Вновь установим модельное время на нуль. Начинается этап моделирования процесса обслуживания заявок второго приоритета в условиях, что на временной оси располагаются уже обслуженные заявки первого приоритета. Следовательно, заявки второго приоритета могут занимать только свободные промежутки времени.

Распределение времени между соседними заявками будем считать известным. Тогда с помощью жребия можно определить возможные значения случайных величин времени поступления заявок. Распределение времени обслуживания также будем считать известным. Тогда с помощью жребия можно определить планируемые интервалы времени обслуживания.

Заявка 2.1 поступает в момент, когда канал занят обслуживанием 1.2. Затем канал освобождения и начинается обслуживание заявки 2.1. Однако, поступившая заявка первого приоритета 1.3 вытесняет заявку 2.1. Только после освобождения канала происходит процесс «дообслуживания» заявки 2.1. Заявка 2.2 также некоторого время ожидает начала обслуживания, а затем обслуживается до конца. Для заявки 2.3 не хватает времени, так как наступает конец периода обслуживания.

Рассмотрим теперь, как формализуется процесс обслуживания заявок второго приоритета в присутствии заявок первого приоритета. При взаимодействия заявок двух различных приоритетов могут возникнуть три возможные ситуации.

Ситуация 1. Ни одна из имеющихся N_{z1}-заявок первого приоритета не препятствует обслуживанию заявки второго приоритета. Два возможных варианта этой ситуации иллюстрируются схемой, показанной на рисунке 13.

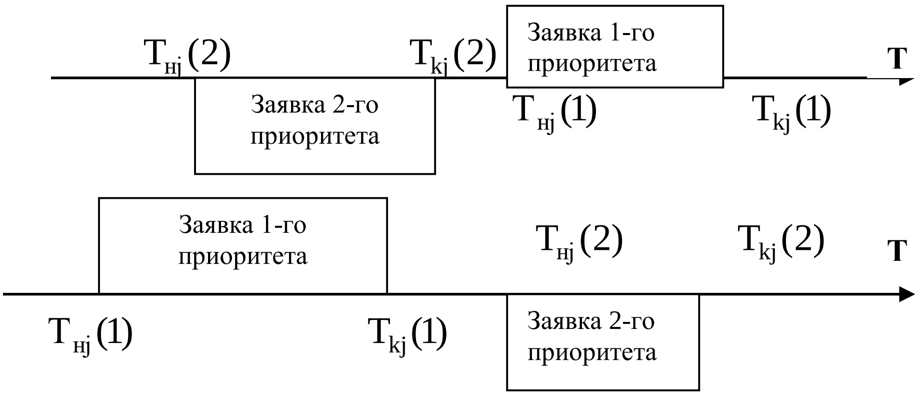


Рисунок 13 - Схемы вариантов 1-й ситуации:
а-первый вариант; б-второй вариант

Здесь $T_{нi}(1)$ -фактическое время начала обслуживания i-й заявки первого приоритета;

$T_{ki}(1)$-фактическое время окончания обслуживания i-й заявки первого приоритета;

$T_{нj}(2)$-первоначально намеченное время начала обслуживания j-й заявки второго приоритета (без учета возможности поступления заявки первого приоритета);

$T_{кj}(2)$-первоначально намеченное время окончания процесса обслуживания j-й заявки второго приоритета(без учета возможности поступления заявки первого приоритета).

Логическое условие, при котором создается 1-й или 2-й вариант 1-й ситуации, записывается так:

$$\{T_{кj}(2) <= T_{нj}(1)\} or \{T_{ki}(1) <= T_{нj}(2)\} \qquad (1)$$

Если для j-й заявки второго приоритета условие (1) выполняется по отношению ко всем заявкам первого приоритета ($i = 1 - N_{z1}$), то j-я заявка может быть обслужена. Ей может помешать только другая заявка 2-го приоритета, принятая ранее к обслуживанию.

Ситуация 2. Система приняла к обслуживанию заявку второго приоритета, и она начала обслуживаться Однако до истечения расчетного времени окончания обслуживания поступила заявка первого приоритета, которая вытесняет данную заявку второго приоритета. Два возможных варианта этой ситуации иллюстрируется схемой, показанной на рисунке 14.

Логическое условие, при котором создается любой из вариантов 2-й ситуации, записывается так:

$$\{T_{нj}(2) < T_{нi}(1)\} \text{AND} \{T_{нi}(1) < T_{kj}(2)\} \qquad (2)$$

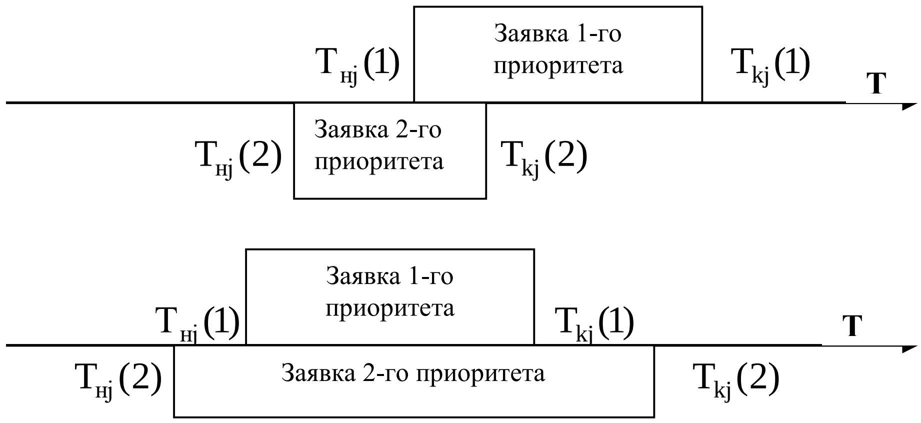


Рисунок 14 Схемы вариантов 2-й ситуации: а -первый вариант, б - второй вариант

Если условие (2) выполняется хотя бы для какой-либо пары значений переменных $T_{нj}(2)$ и $T_{ki}(1)$ при изменении i от 1 до N_{z1}, то продолжение процесса обслуживания заявки второго приоритета откладывается до момента освобождения канала.

После этого рассматривается возможность «дообслуживания» заявки. С этой целью производится корректировка времени начала и окончания обслуживания заявки по формулам:

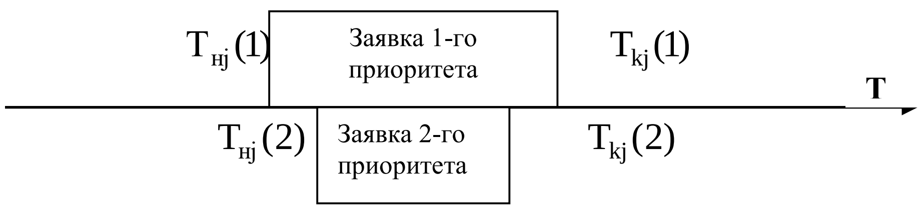
$$T_{нj}(2) = T_{k.fix}$$
$$T_{kj}(2) = T_{kfix} - [T_{kj}(2) - T_{нfix}]$$

где $T_{нfix}$ -фиксированное время начала обслуживания заявки первого приоритета, для которой выполняется условие (2);

T_{kfix} -фиксированное время окончания обслуживания заявки первого приоритета, для которой выполняется условие (2).

После этого вновь рассматривается возникшая ситуация.

Ситуация 3.Заявка второго приоритета поступила в период обслуживания заявки первого приоритета. Следовательно, заявка второго приоритета не может быть принята к обслуживанию. Два возможных варианта этой ситуации иллюстрируются схемой, показанной на рис. 5



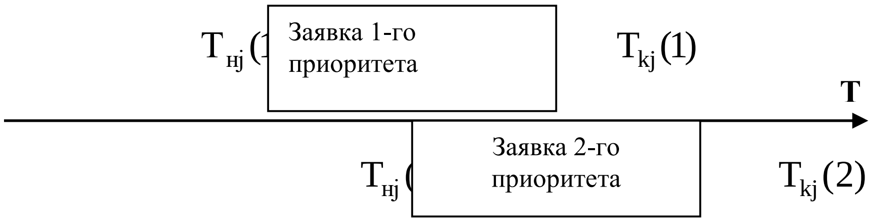


Рисунок 15 - Схемы вариантов 3-й ситуации: а-первый; б-второй вариант

Логическое условие, при котором создается любой из вариантов 3-й ситуации, записывается так:

$$\{T_{нi}(1) < T_{нj}(2)\} And \{T_{нj}(2) < T_{ki}(1)\} \qquad (3)$$

Если условие (3) выполняется для какой-либо пары значений переменных $T_{н}(2)$ и $T_{ki}(2)$ при изменении i от 1 до N_{z1}, то производится «сдвиг» времени начала и окончания обслуживания заявки по формулам:

$$T_{нj}(2) = T_{kfix};$$
$$T_{kj}(2) = T_{kfix} - [T_{kj}(2) - T_{нj}(2)]$$

После этого вновь рассматривается возникшая ситуация для «сдвинутой» заявки.

«Дообслуживаемая», или «сдвинутая», заявка, в свою очередь, может оказаться в одной из трех перечисленных выше возможных ситуаций.

В конечном счете процесс обслуживания может иметь два исхода:

1) заявка будет обслужена до конца;
2) истечет время функционирования системы и заявка останется необслуженной (так же, как и все последующие заявки второго приоритета).

Контрольные вопросы:

7. Перечислить этапы разработки математических моделей.
8. Для чего проводят машинные эксперименты.
9. Перечислите разновидности СМО.
10. Что такое относительный приоритет?
11. Что такое абсолютный и смешанный приоритет?
12. Перечислите способы построения моделирующих алгоритмов.
13. Что такое обычные и особые состояния?

Основная литература:

1. Варфоломеев В.И. Алгоритмическое моделирование элементов экономических систем. Практикум. Уч.пособие. Москва «Финансы и статистика» . 2000.
2. Прицкер А. Введение в имитационное моделирование и язык СЛАМ. Монография, Москва, Мир.1987.
3. Шукаев Д.Н. Имитационное моделирование на ЭВМ. Уч.пос.Алматы, 1995.
4. Шукаев Д.Н. Моделирование случайных закономерностей на ЭВМ. Уч.пос. Алма-Ата, 1991.

5. Шукаев Д.Н., Абдуллина В.З., Муртазина А.У. Методические указания к практическим занятиям по курсу «Моделирование систем». Алма-Ата 1985.
6. Шукаев Д.Н., Абдуллина В.З., Муртазина А.У. Методические указания к лабораторным занятиям по курсу «Моделирование систем».Алма-Ата 1987.
7. Шеннон Р. Имитационное моделирование систем – искусство и наука. Монография, изд-во «Мир»1978.
8. Гмурман В.Е.Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистикеУч.пос для вузов.М.;Высш.школа, 1999.
9. Исмаилова Р.Т. Методические указания по курсу Имитационному моделированию для практических и самостоятельных работ. Алматы, КазНТУ, 2003г.
10. Исмаилова Р.Т. Методические указания по курсу Имитационному моделированию для лабораторных и самостоятельных работ .Алматы, КазНТУ, 2003г.